

Πίνακας απαντήσεων

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	B	B	Δ	B	Δ	Δ	A	Γ	Δ	A	B	Γ	B	A	Γ	B	Δ	Δ	E

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Γ	Δ	A	Γ	Γ	Δ	B	A	B	B	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	B	Δ	Δ	A	Γ

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A	Δ	Γ	Δ	Γ	Γ	Δ	Γ	Δ	A	Γ	Γ	Γ	A	A	Γ	Δ	Γ	B	B

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A	E	B	Δ	A	B	B	B	Δ	A	Γ	B	Δ	A	A	Γ	Δ	B	Δ	B

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A	Γ	Γ	A	Γ	Δ	Δ	Δ	Δ	Γ	E	B	Δ	Δ	B	A	B	Γ	B	Γ

Υποδείξεις

1. Κάνουμε τις πράξεις με τη σωστή προτεραιότητα:
 $\Pi = (2008 - 468 - 540) = 1000.$
2. Κάνουμε με αντίστροφη σειρά τις πράξεις:
 - $1.000 : 8 = 125$
 - $125 - 75 = 50$
 - $50 + 201 = 251$
 - $251 \cdot 8 = 2008$, με άθροισμα ψηφίων $2 + 0 + 0 + 8 = 10$.
3. Παρατηρούμε ότι η πρώτη παρένθεση είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερη της δεύτερης, οπότε η διαφορά τους είναι 2.
4. Είναι $11 + 3 = 14$
Διαιρούμε: $196 : 14 = 14$,
Άρα $\boxed{x} + 2 = 14$, οπότε $x = 12$.
5. Από τον αριθμό $\Gamma\Delta$ αφαιρούμε 8 και βρίσκουμε 2Γ . Άρα το Γ (ψηφίο δεκάδων του $\Gamma\Delta$) είναι 2 ή 3.
 - Αν $\Gamma = 2$, τότε
$$\begin{array}{r} 2\Delta \\ - 8 \\ \hline 22 \end{array}$$
 αδύνατο, αφού το Δ θα ήταν 10.
 - Αν $\Gamma = 3$, τότε
$$\begin{array}{r} 3\Delta \\ - 8 \\ \hline 23 \end{array}$$
 άρα $\Delta = 1$. Τότε $\Gamma + \Delta = 3 + 1 = 4$.
6. Το άθροισμα των δύο διψήφιων είναι τριψήφιος,
οπότε $A + \Gamma > 9$.
Επίσης δεν μπορεί να ξεπερνά το 198, οπότε $\Gamma = 1$.
Από τις δυνατές περιπτώσεις για το άθροισμα των A και Γ , αφού το ψηφίο των μονάδων του είναι $\Gamma = 1$, έχουμε:

(*) Τις υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων έκανε ο συνάδελφος και συγγραφέας Γιώργος Ρίζος, τον οποίο και ευχαριστούμε. Είναι πιθανό σε μερικές ασκήσεις να υπάρχουν περισσότερες από μία λύση. Επίσης σε αρκετά προβλήματα μπορούμε να βρούμε λύση και με πρακτική αριθμητική. Στις υποδείξεις που παρουσιάζονται δίνεται μόνο μια υπόδειξη και όχι πάντα με πρακτική αριθμητική αλλά με χρήση βασικών εξισώσεων. Οι μαθητές της Ε' τάξης, όπου είναι απαραίτητο, πρέπει να προσπαθήσουν να βρουν λύση με πρακτική αριθμητική και να αγνοήσουν τις υποδείξεις που τυχόν βασίζονται σε εξισώση ή άλλον τρόπο άγνωστο σε αυτούς.

A	B	
2	9	$29 + 92 = 121$ ΔΕΚΤΗ γιατί το 121 είναι της μορφής ΓΑΓ
3	8	$38 + 83 = 121$ Απορ.
4	7	$47 + 74 = 121$ Απορ.
5	6	$56 + 65 = 121$ Απορ.

Κ.Ο.Κ. με εναπλήσιαγή των A, B. Η πύση είναι μοναδική.

7. Η μηχανή μας (που μοιάζει με χειροκίνητη κρεατομηχανή!) κάνει την πράξη: $3 \cdot x + 3$, όπου x ο αριθμός που δίνουμε εμείς.
Για να δώσει 12, θα πρέπει: $3x + 3 = 12$ ή $3x = 9$, οπότε $x = 3$.
8. Κάνουμε πράξεις με σωστή προτεραιότητα.
 $\Pi = (2008 - 1540 - 15) : 61 = 1525 : 61 = 25$.
9. Είναι: $28 + 36 = 64$.
Διαιρούμε: $960 : 64 = 15$
Άρα: $52 - \boxed{x} = 15$, οπότε $x = 37$.
10. Κάνουμε πρώτα ομώνυμα τα κλάσματα και μετά τις πράξεις.
Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{10}{7} + \frac{9}{8} - \frac{9}{21} - \frac{3}{24} &= \frac{10}{7} + \frac{9}{8} - \frac{\cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot 7} - \frac{\cancel{3} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot 8} \\ &= \left(\frac{10}{7} - \frac{3}{7} \right) + \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{7}{7} + \frac{8}{8} = 1+1=2 \end{aligned}$$

11. Προσθέτουμε σε ζεύγη τα ομώνυμα κλάσματα:

$$\begin{aligned} \frac{2}{2005} + \frac{2003}{2008} + \frac{2003}{2005} + \frac{5}{2008} &= \left(\frac{2}{2005} + \frac{2003}{2005} \right) + \left(\frac{2003}{2008} + \frac{5}{2008} \right) = \\ &= \frac{2005}{2005} + \frac{2008}{2008} = 1+1=2 \end{aligned}$$

12. Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα.

Η ανίσωση $\frac{3}{5} < \boxed{\square} < \frac{4}{5}$ γράφεται:

$$\frac{3}{5} < \frac{\square}{7} < \frac{4}{5} \quad \text{γράφεται:}$$

$$\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} < \frac{5 \cdot \square}{5 \cdot 7} < \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} \quad \text{ή} \quad \frac{21}{35} < \frac{5 \cdot \square}{35} < \frac{28}{35}$$

Άρα, το \square είναι 5.

13. Παρατηρούμε ότι κάθε αριθμός στην πρώτη παρένθεση είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος ενός άλλου αριθμού της δεύτερης, οπότε η διαφορά τους είναι 4.
14. Διαδοχικά έχουμε ότι: τα $\frac{2}{5}$ του 300 είναι 120. Το $\frac{1}{3}$ του 120 είναι 40.

$$\begin{aligned} 15. \quad & \frac{2003}{2007} + \frac{3}{2008} - \frac{3}{2007} + \frac{2005}{2008} + \frac{7}{2007} = \\ & = \left(\frac{2003}{2007} - \frac{3}{2007} + \frac{7}{2007} \right) + \left(\frac{3}{2008} + \frac{2005}{2008} \right) = \\ & = \frac{2007}{2007} + \frac{2008}{2008} = 1+1=2 \end{aligned}$$

16. Με 200 ισούνται τα $\frac{2}{5}$ του 500, οπότε ο αριθμός που ζητάμε είναι:
 $500 - 20 = 480$.

17. Είναι διαδοχικά:

$$\begin{aligned} & \frac{2004}{2008} + \frac{2}{2009} + \frac{3}{2008} + \frac{3}{2009} + \frac{1}{2008} + \frac{2004}{2009} = \\ & = \left(\frac{2004}{2008} + \frac{3}{2008} + \frac{1}{2008} \right) + \left(\frac{2}{2009} + \frac{3}{2009} + \frac{2004}{2009} \right) = \\ & = \frac{2008}{2008} + \frac{2009}{2009} = 1+1=2 \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{2007} + \frac{3}{2008} + \frac{2005}{2007} + \frac{2005}{2008} = \\ &= \left(\frac{2}{2007} + \frac{2005}{2007} \right) + \left(\frac{3}{2008} + \frac{2005}{2008} \right) = \\ &= \frac{2007}{2007} + \frac{2008}{2008} = 1+1=2 \end{aligned}$$

19. Κάνουμε τις απλοποιήσεις:

$$\frac{\cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \dots \cdot \cancel{2005} \cdot 2006}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \dots \cdot \cancel{2005}} = \frac{2006}{2} = 1003$$

20. Το γινόμενο $15 \cdot 12$ είναι 120, οπότε στο γινόμενό μας, ψηφίο των μονάδων θα είναι το 0.
21. Πρέπει ο αριθμός να έχει όσο το δυνατό μικρότερο πλήθος ψηφίων. Θέλουμε όσο το δυνατό περισσότερα ψηφία του να είναι το 9.
Ο αριθμός είναι: $\underbrace{399\dots99}_{223 \text{ ψηφία}}$
22. Πρέπει ο αριθμός να έχει όσο το δυνατό μικρότερο πλήθος στοιχείων. Θέλουμε όσο το δυνατό περισσότερα ψηφία του να είναι το 9.
Είναι: $2009 = 9 \cdot 223 + 2$
Ο αριθμός $\underbrace{299\dots99}_{223 \text{ ψηφία}}$ είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός με άθροισμα ψηφίων 2009.
23. Η ταυτότητα της Ευκλείδιας Διαιρεσης είναι: $\Delta = \delta \cdot n + u$, $0 \leq u < \delta$.
Επομένως: $\Delta = 39 \cdot 76 + 36$. Άρα $\Delta = 3000$
Το υπόλοιπο της διαιρεσης 3000 με το 52 είναι 36.
24. Το 2000 είναι το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 25, που είναι μικρότερο του 2008.
Άρα ο μικρότερος αριθμός που πρέπει να αφαιρέσουμε είναι το 8.
25. Είναι $366 = 52 \cdot 7 + 2$. Αφού η 1η Ιανουαρίου είναι Τρίτη, μετά από 52 εβδομάδες η 364η (29 Δεκεμβρίου) είναι Δευτέρα, άρα η 31η Δεκεμβρίου είναι Τετάρτη.
26. Τα κοινά πολλαπλάσια των 3, 4 και 5 είναι: 60, 120, 180, 240, 300, 360 κ.ο.κ.
Ο ζητούμενος αριθμός είναι ο μικρότερος από τους αριθμούς: 61, 121, 181, 241, 301, 361 κ.ο.κ. που είναι και πολλαπλάσιο του 7.
Βρίσκουμε ότι είναι το 301.
27. Αφού διαιρείται με το 5, αλλά όχι με το δύο, είναι $A = 5$.
Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού 45B75 πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 9, οπότε $21 + B = 27$ (πολ/σιο 9). Άρα $B = 6$.
28. Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του 25 που είναι μικρότερο του 678 είναι $27 \cdot 25 = 675$. Άρα το υπόλοιπο είναι 3.
29. Παρατηρούμε ότι: $25^3 = 15625$. Δοκιμάζουμε τους αριθμούς: 24, 25, 26.
Είναι, πράγματι: $24 \cdot 25 \cdot 26 = 15600$.

ΑΛΛΗ ΜΕΘΟΔΟΣ:

Η ανάλυση του αριθμού 15600 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων δίνει:

$$15600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13.$$

Αφού οι αριθμοί είναι διαδοχικοί, ο ένας, του πλάχιστον, είναι περιττός.

Από τις δυνατές τιμές: 3, 5, 13, 15, 25, 39, 65, 75 κ.λπ. (που δεν είναι ... και απαραί τηπο να τις καταγράψουμε όλες), εύκολα βρίσκουμε ότι ένας διαιρέτης είναι ο 25. Με δοκιμή βλέπουμε ότι οι άλλοι αριθμοί είναι 24 και 26.

Μικρότερος αριθμός είναι ο 24. Είναι $2 + 4 = 6$.

30. Παρατηρούμε ότι:

$$111\dots111=3\cdot370370370\dots37$$

31. Αναζητάμε πόσα μηδενικά έχει στο τέλος το γινόμενο:

$$2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 25 \dots 42 \cdot 45 \cdot 50.$$

Είναι δώδεκα.

32. Ο Γιώργος πλήρωσε συνολικά $600 + 800 = 1.400$ €.

Εισέπραξε συνολικά: $700 + 900 = 1.600$ €. Άρα κέρδισε 200 €.

33. Έχουμε διαδοχικά:

- $15 \cdot 3 = 45$
- $45 + 305 = 350$
- $350 : 25 = 14$
- $14 + 1994 = 2008$, με άθροισμα ψηφίων $2 + 0 + 0 + 8 = 10$.

34. Το παιδί πλήρωσε $20 - 12 = 8$ € για 4 ίδια τετράδια. Κοστίζει 2 € το καθένα. Τα τρία κοστίζουν 6 €, οπότε τα ρέστα θα ήταν 14 €.

35. Τα 5 CD κόστισαν 75 €, οπότε κοστίζει 15 € το ένα.

Αν κόστιζαν 2 € λιγότερο το καθένα, δηλαδή 13 €, τα τρία θα κόστιζαν 39 €, οπότε θα έφερνε υπόλοιπα 61 €.

36. ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ

Αν x το βάρος του πεπονιού, τότε:

$$x = 2 + \frac{1}{2}x \text{ ή } x - \frac{1}{2}x = 2 \text{ ή } \frac{1}{2}x = 2 \text{ οπότε } x = 4 \text{ Kg.}$$

ΜΕ ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Ένα πεπόνι ίσο με 2 κιλά και μισό πεπόνι

Δύο μισά πεπόνια ίσα με 2 κιλά και μισό πεπόνι

Μισό πεπόνι ίσο με 2 κιλά

Άρα ένα πεπόνι ίσο με 4 κιλά.

37. Πρέπει το áθροισμα των ψηφίων του 132A να είναι πολλαπλάσιο του 9, οπότε $A = 3$.
Τότε: $1323 - 385 = 938$.
38. Για απόσταση 1.000 χιλιομέτρων τα 4 πλάστικα κινούνται ταυτόχρονα διανύοντας συνολικά 4.000 χιλιόμετρα. Εναλλάσσουμε ομοιόμορφα τα 5 πλάστικα, οπότε το καθένα διανύει $4.000 : 5 = 800$ χιλιόμετρα.
39. Προφανώς, αφού μιλάμε για δασκάλα, η πλικία που αναζητούμε είναι από 23 ετών έως 65 (το πολύ...).
Τα πολλαπλάσια του 7 είναι: 28, 35, 42, 49, 56, 63.
 - $28 + 1 = 29$ Απορρίπτεται (δεν είναι πολλαπλάσιο του 9)
 - $35 + 1 = 36$ ΔΕΚΤΗ
 - $42 + 1 = 43$ Απορρίπτεται
 - $49 + 1 = 50$ Απορρίπτεται
 - $56 + 1 = 57$ Απορρίπτεται
 - $63 + 1 = 64$ ΑπορρίπτεταιΗ πλικία είναι 35, áθροισμα ψηφίων 8.
40. Τα $\frac{2}{3}$ των μαθητών είναι 40 μαθητές.
Το $\frac{1}{3}$ είναι 20, άρα όλοι είναι $3 \cdot 20 = 60$.
Τα $\frac{2}{5}$ του 60 είναι 24. Δεν μαθαίνουν Γερμανικά οι υπόλοιποι 36.

41. Γράφουμε:

$$\begin{array}{r} 3 \ 9 \\ \times \ \alpha \ \beta \\ \hline * \ * \ * \\ * \ * \ 2 \\ \hline * \ * \ * \ 3 \end{array}$$

Ο πολλαπλασιασμός $\beta \times 9$ δίνει γινόμενο με ψηφίο μονάδων 3, άρα $\beta = 7$.
Ο πολλαπλασιασμός $\alpha \times 9$ δίνει γινόμενο με ψηφίο μονάδων 2, άρα $\alpha = 8$.
Είναι: $39 \cdot 87 = 3393$, με áθροισμα ψηφίων 18.

42. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ:
Αν είναι x η σημερινή της πλικία, τότε:
 $x - 5 + x + 5 = 60$ άρα $2x = 60$ δηλαδή: $x = 30$.

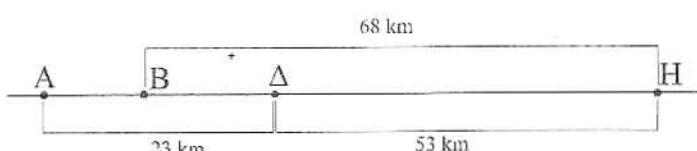
ΠΡΑΚΤΙΚΑ:

Το μισό του 60 είναι 30. Σήμερα είναι 30, πριν 5 χρόνια ήταν 25 και μετά 5 χρόνια θα είναι 35.

43. Ας υποθέσουμε ότι αναχωρώ για τη Ν. Υόρκη στις 7 του μήνα. Την ώρα που θα αναχωρώ φτάνει στο λιμάνι το πλοίο που έφυγε από τη Ν. Υόρκη την 1η του μήνα.
Στη Ν. Υόρκη θα φτάσω στις $7+6=13$ του μήνα.
Την στιγμή που θα φτάνω θα συναντήσω το πλοίο που φεύγει για Πειραιά. Άρα τα πλοία που θα συναντήσω σε ανοιχτή θάλασσα είναι αυτά που έφυγαν από τη Ν. Υόρκη στις $2,3,4,\dots,12$ του μήνα. Αυτά είναι συνολικά 11 πλοία.
(Λύνεται και με άλλους τρόπους)
44. Αν γυρίσει στο σπίτι του από το σημείο που βρίσκεται θα καθυστερήσει συνολικά $11 + 7 = 18$ λεπτά. Άρα χρειάζεται 9 λεπτά για να πάει και 9 λεπτά για να γυρίσει. Το σπίτι του απέχει 9 λεπτά.
45. Αφού το άθροισμα των τριψήφιων AAA και BBB είναι τετραψήφιος, η τιμή του Δ είνα 1. (Δεν μπορεί δύο τριψήφιοι να δώσουν άθροισμα πάνω από 1.998).
Τώρα, δοκιμάζουμε αν υπάρχουν τέτοιοι αριθμοί. Πράγματι για $A = 2$ και $B = 8$, είναι $222 + 888 = 1.110$.
46. ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ: Αν ήταν x οι δάσκαλοι, τότε $15 = 2x + 1 + 1$. Άρα $x = 6$.
Τα 15 € τα μοιράζονται από 2 € ο καθένας από τους x δασκάλους και ο σύμβουλος και περισσεύει και 1 €).

ΠΡΑΚΤΙΚΑ: Από τα 15 € που περισσεύουν δίνουν 1 για φιλοδώρημα και μοιράζονται υπόλοιπα 14 €. Άρα είναι 7 (με το σύμβουλο) κ.ο.κ.

47. Φτιάχνουμε έναν άξονα με τα διαδοχικά σημεία A, B, ..., H και τοποθετούμε τα δεδομένα της εκφώνησης:



Τότε, $AH = AD + DH = 76$ Km και $BH = 68$ Km, οπότε $AB = 8$ Km.

48. Πλησιάζουν το ένα το άλλο με ταχύτητα 180 Km/h.
Δηλαδή 60 λεπτά πριν συναντηθούν απείχαν 180 Km, οπότε 1 λεπτό πριν συναντηθούν απείχαν $180 : 60 = 3$ Km.
49. Τα πολλαπλάσια του 5 είναι 100. Τα πολλαπλάσια του 9 είναι 55. Αφαιρούμε τα κοινά πολλαπλάσια των 5 και 9, δηλαδή τα πολλαπλάσια του 45, γιατί τα έχουμε με τρήσει δύο φορές (και ως πολλαπλάσια του 5 και ως πολλαπλάσια του 9). Αυτά είναι 11. Έχουμε, λοιπόν, $155 - 11 = 144$ λαχνούς.

50. ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:

Αν είναι x η ηλικία του αδελφού της το 2005, η ηλικία της Μαρίας είναι $4x$.

$$\text{Το } 2006 \text{ θα είναι: } 4x + 1 = 3(x + 1)$$

$$4x + 1 = 3x + 3$$

$$4x - 3x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

Οπότε, το 2005 η Μαρία είναι 8 ετών και το 2010 θα είναι 13 ετών.

ΠΡΑΚΤΙΚΑ:

Δεχόμαστε ακέραιους αριθμούς για τις ηλικίες.

Οι δυνατές περιπτώσεις φαίνονται στον πίνακα:

2005		2006	
ΗΛΙΚΙΑ ΜΑΡΙΑΣ	ΗΛΙΚΙΑ του ΑΔΕΛΦΟΥ	ΗΛΙΚΙΑ ΜΑΡΙΑΣ	ΗΛΙΚΙΑ του ΑΔΕΛΦΟΥ
4	1	5	2
8	2	9	3
12	3	13	4
16	4	17	5
20	5	21	6
24	6	25	7

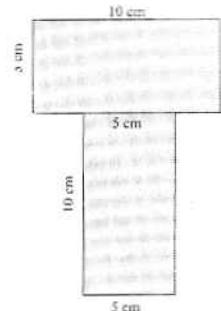
K.O.K.

Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνονται οι δυνατές τιμές της ηλικίας της Μαρίας το 2005, ο λόγος των ηλικιών τους το 2006, αυξάνει, άρα θα είναι διαρκώς μεγαλύτερος του 3.

51. Το σχήμα αποτελείται από δύο ορθογώνια περιμέτρου

$2(10 + 5) = 2 \cdot 15 = 30 \text{ cm}$ το καθένα, εκτός από το μεσαίο ευθύγραμμο τμήμα 5 cm , στο οποίο εφάπτονται και το οποίο αφαιρούμε από την περίμετρο και των δύο. Άρα η συνολική περίμετρος είναι:

$$2 \cdot 25 = 50 \text{ cm}.$$



ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ:

Μετράμε διαδοχικά: 3 πλευρές από 10 cm , 3 από 5 cm και δύο που έχουν μαζί μήκος 5 cm (από την πλευρά 10 cm αφαιρέσαμε το μεσαίο τμήμα 5 cm). Σύνολο 50 cm .

52. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι 28 cm , οπότε η πλευρά του είναι $28 : 4 = 7 \text{ cm}$.

Τότε το πλάτος του ορθογωνίου είναι 7 cm και το πλάτος του 14 cm .

Το εμβαδόν του είναι $14 \cdot 7 = 98 \text{ cm}^2$.



53. Κατά μήκος έχει 18 τετράγωνα. Κατά πλάτος 10, οπότε συνολικά 180 τετράγωνα.

54. Το τετράγωνο Α έχει πλευρά $16 : 4 = 4 \text{ cm}$.

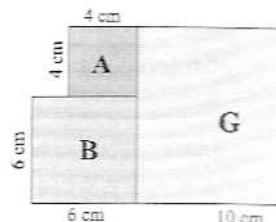
Το τετράγωνο Γ έχει πλευρά $40 : 4 = 10 \text{ cm}$.

Άρα το Β έχει πλευρά $10 - 4 = 6$ cm.

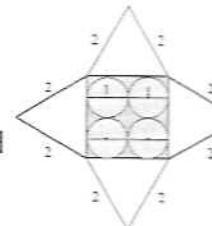
Τα εμβαδά τους είναι:

- Εμβ. (Α) = $4^2 = 16$ cm².
- Εμβ. (Β) = $6^2 = 36$ cm².
- Εμβ. (Γ) = $10^2 = 100$ cm².

Συνολικά: $100 + 36 + 16 = 152$ cm².



55. Οι κύκλοι εφάπτονται στο τετράγωνο. Η πλευρά του τετραγώνου είναι 2 m, οπότε και η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 2 m. Η περίμετρος θα είναι $8 \cdot 2 = 16$ m.



56. Αφού το ορθογώνιο αποτελείται από δύο τετράγωνα, το μήκος του είναι διπλάσιο του πλάτους του. Άν x είναι το πλάτος, τότε το μήκος είναι 2x.

$$\text{Περίμετρος} = 2(x + 2x) = 6x.$$

Άρα $6x = 60$, οπότε $x = 10$ cm. Επομένως: πλάτος = 10 cm και μήκος = 20 cm.

Το εμβαδόν είναι $20 \cdot 10 = 200$ cm².



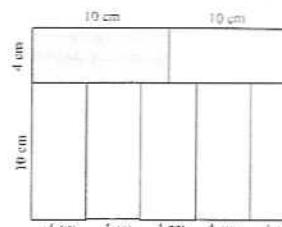
57. Κάθε ένα από τα 5 ίσα ορθογώνια στη βάση έχει πλάτος $20 : 5 = 4$ cm.

Κάθε ένα από τα 2 ίσα ορθογώνια στη κορυφή έχει μήκος

$$20 : 2 = 10$$
 cm.

Τότε, αφού όλα τα μικρά ορθογώνια είναι ίσα, θα έχουν διαστάσεις 4 cm και 10 cm.

Το πλάτος του μεγάλου ορθογωνίου είναι 14 cm και το εμβαδόν του $14 \cdot 20 = 280$ cm².



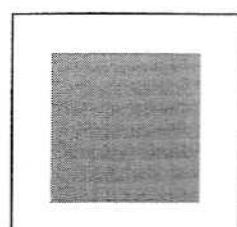
58. Η πλευρά του γραμμοσκιασμένου είναι:

$$10 \text{ cm}.$$

Η πλευρά του μεγάλου είναι:

$$10 + 1 + 1 = 12 \text{ cm}.$$

Η περίμετρός του είναι $4 \cdot 12 = 48$ cm.



59. Αν x το πλάτος, το μήκος θα είναι 2x.

Τότε, η περίμετρος είναι: $2(2x + x) = 30$ άρα $3x = 15$ ή $x = 5$ m, οπότε το εμβαδόν είναι $5 \cdot 10 = 50$ m².

60. Το A έχει πλευρά $24 : 4 = 6$ cm και εμβαδόν $6^2 = 36$ cm².

Το B έχει εμβαδόν $36 : 4 = 9$ cm², άρα πλευρά 3 cm και περίμετρο 12 cm.

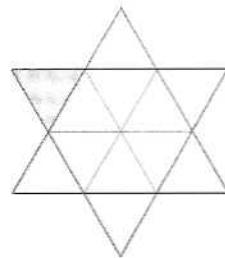
61. ΕΠΟΠΤΙΚΗ ΛΥΣΗ:

Φέρνουμε τις βοηθητικές γραμμές που φαίνονται στο σχήμα. Αποτελείται από 12 ίσα τρίγωνα, οπότε το εμβαδόν όλου του σχήματος (αστεριού) είναι $12 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^2$.

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ (ΑΠΟΔΕΙΞΗ):

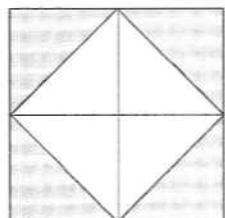
Το γραμμοσκιασμένο τριγωνάκι είναι όμοιο με το μεγάλο με πόσο ομοιότητας $1 : 3$. Άρα ο πόλος των εμβαδών τους είναι $1 : 9$.

Το εμβαδόν του μεγάλου τριγώνου είναι 18 cm^2 .

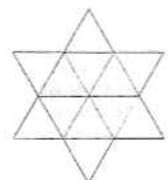


62. Τα εμβαδά των δύο οικοπέδων είναι $144 + 256 = 400 \text{ m}^2$. Το νέο οικόπεδο πρέπει να έχει το ίδιο εμβαδόν, άρα πλευρά 20 m. Η περίμετρός του είναι 80 m.

63. Τα οκτώ τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το σχήμα είναι ίσα. (Αποδεικνύεται πολύ εύκολα). Τα τέσσερα απ' αυτά σχηματίζουν το γραμμοσκιασμένο τμήμα, οπότε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι διπλάσιο του εμβαδού του γραμμοσκιασμένου τμήματος.



64. Το σχήμα χωρίζεται σε 12 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα. Το εξάγωνο σχηματίζεται από 6 απ' αυτά, οπότε ολόκληρο το σχήμα έχει εμβαδόν διπλάσιο του εξαγώνου, δηλαδή 120 cm^2 .



65. ΜΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

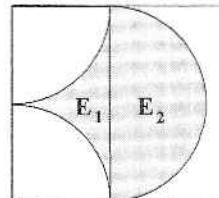
Η ακτίνα του ημικυκλίου είναι 5 cm.

Η περιοχή E_1 υπολογίζεται αν από το εμβαδόν ορθογωνίου με πλευρές 10 cm και 5 cm αφαιρέσουμε τα δύο τεταρτοκύκλια, άρα:

$$E_1 = 10 \cdot 5 - \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2$$

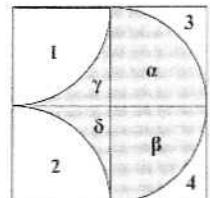
Η περιοχή E_2 είναι ημικύκλιο ακτίνας 5 cm.

$$E_2 = \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2, \text{ οπότε, } E_1 + E_2 = 50 \text{ cm}^2.$$



ΕΠΟΠΤΙΚΗ ΛΥΣΗ:

Οι πλευκές περιοχές 1 και 2 είναι ίσες με τις γκρι α και β . Επίσης, οι πλευκές περιοχές 3 και 4 είναι ίσες με τις γκρι γ και δ . Άρα η γκρι περιοχή είναι η μισή του τετραγώνου, οπότε έχει εμβαδόν 50 cm^2 .



66. Σε 10 μέρες έχει καθύψει τη μισή λίμνη, οπότε αφού κάθε μέρα διπλασιάζεται, την 11η θα έχει καθύψει όλη τη λίμνη
67. Αριθμούμε τα ορθογώνια.

Σχηματίζονται τα εξής ορθογώνια:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Στο σύνολο είναι 21 ορθογώνια.

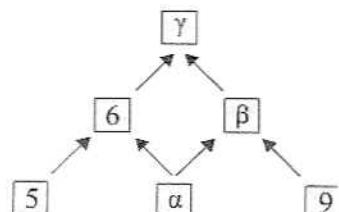
1	2	3	4	5	6
12	23	34	45	56	
123	234	345	456		
1234	2345	3456			
12345	23456				
123456					

68. Συμβολίζουμε με γράμματα τους αριθμούς στα τετράγωνα:

Είναι: $\frac{5+a}{2} = 6$, οπότε $5+a = 2 \cdot 6 \Rightarrow 5+a = 12$. Άρα $a = 7$.

Τότε: $\frac{7+9}{2} = \beta$, οπότε $\beta = 8$.

Τέλος, $\frac{6+8}{2} = \gamma$, οπότε $\gamma = 7$.



69. Αριθμούμε τα ορθογώνια. Σχηματίζονται τα έξι ορθογώνια:

1	2	3
12	23	
123		

1
2
3

70. Στην 1η δίπλωση το χαρτί χωρίζεται σε 2 ίσα μέρη.

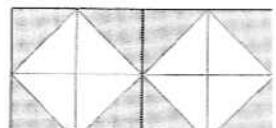
Στη 2η δίπλωση το χαρτί χωρίζεται σε 4 ίσα μέρη.

Στην 3η το χαρτί χωρίζεται σε 8 ίσα μέρη.

Στην 4η το χαρτί χωρίζεται σε 16 ίσα μέρη.

Στην 5η το χαρτί χωρίζεται σε 32 ίσα μέρη.

71. Όλα τα τρίγωνα (γκρι και λευκά) στα οποία χωρίζονται τα δύο τετράγωνα του σχήμα του είναι ίσα, οπότε η γκρι επιφάνεια είναι η μισή του σχήματος, δηλαδή καλύπτει το 50%.



72. Αριθμούμε τα ορθογώνια.

Σχηματίζονται τα παρακάτω 18 ορθογώνια:

1	2	3
4	5	6

1	2	3	4	5	6
12	23	36	45	56	
123	25		456		
14	2356				
1245					
123456					

73. Αφού ο Κ "πένει" 504, ο Ρ θα πει 500, οπότε και όλα τα πολλαπλάσια του 5. Άν ο Ρ πει και το 0, το 1 θα το πει ο Ν.

74. Μικρά τρίγωνα (πλευράς 1) είναι 12.

Τρίγωνα πλευράς 2 είναι 6 (με κορυφές: Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ).

Τρίγωνα πλευράς 3 είναι 2 (τα ΑΓΕ και ΔΖΒ).

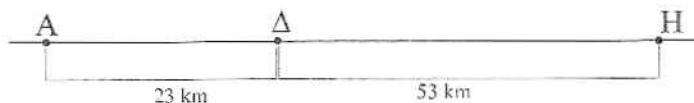
Συνολικά είναι 20.

75. Επειδή ο συγός ισορροπεί, παρατηρούμε ότι:

$$2 \bullet + 2 \cancel{\Delta} = 2 \blacksquare + 1 \bullet + 2 \cancel{\Delta}$$

Άρα: $1\bullet = 2\blacksquare$, οπότε ο κύκλος ζυγίζει $2 \cdot 10 = 20$ gr.

76. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι: $AH = A\Delta + \Delta H = 76$ Km



77. Στις 3:00 η γωνία των δύο δεικτών είναι 90°.

Σε μία ώρα (60 min) ο πλεπτοδείκτης (μεγάλος δείκτης) διαγράφει γωνία 360° και ο ωροδείκτης (μικρός) $360 : 12 = 30$.

Σε 10 min (το 1/6 της ώρας) ο μεγάλος μειώνει τη γωνία με τον μικρό κατά 60° και ο μικρός αντίστοιχα διαγράφει γωνία 5°, αυξάνοντας τη μεταξύ τους γωνία.

Η νέα γωνία που σχηματίζουν είναι: $30 + 5 = 35$.

78. Αριθμούμε τα εξάγωνα και καταγράφουμε τις δυνατές διαδρομές:

A 0 1 2 6 B

A 0 1 5 6 B

A 0 1 5 9 B

A 0 4 5 6 B

A 0 4 5 9 B

A 0 4 8 9 B

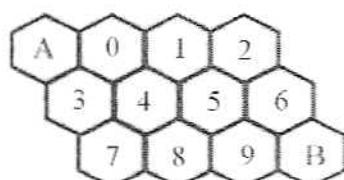
A 3 4 5 6 B

A 3 4 5 9 B

A 3 4 8 9 B

A 3 7 8 9 B

Συνολικά 10 διαδρομές





79. Οι αριθμοί μειώνονται κατά 6 σε κάθε βήμα.

Έχουμε διαδοχικά:

1os	31
2os	$31 - 6 = 25$
3os	$25 - 6 = 19$
4os	$19 - 6 = 13$
5os	$13 - 6 = 7$
6os	$7 - 6 = 1$

80. Έχουμε μια επανάληψη του ίδιου μοτίβου κάθε $5 + 4 + 3 = 13$ μάρμαρα.

Τα 600 μάρμαρα είναι διαταγμένα σε 50 πλήρεις επαναλήψεις, άρα το 600° είναι μαύρο.

81. Σε κάθε βήμα προσθέτει δύο κουκίδες.

$$V_1 = 3$$

$$V_2 = 5$$

$V_3 = 7$ κ.ο.κ. Από το V_1 ως το V_{50} κάνουμε 49 βήματα, οπότε προσθέτουμε 98 κουκίδες. $V_{50} = 3 + 98 = 101$.

ΣΧΟΛΙΟ: Πρόκειται για άσκηση μοτίβου. Τέτοιες ασκήσεις παρουσιάζονται συχνά σε διαγωνισμούς.

82. Σε κάθε βήμα προσθέτει τέσσερα τετράγωνα.

$$X_1 = 5$$

$$X_2 = 9$$

$X_3 = 13$ κ.ο.κ. Από το X_1 ως το X_{50} κάνουμε 49 βήματα, οπότε προσθέτουμε 196 τετράγωνα. $X_{50} = 5 + 196 = 201$.

83. Οι ημιευθείες το χωρίζουν σε 8 ίσες γωνίες, που είναι 45° η καθεμία, έφόσον $360^{\circ} : 8 = 45^{\circ}$.

84. Έχουμε διαδοχικά: Οι 2 πάσσαλοι ορίζουν ένα διάστημα (6 μέτρων), οι 3 πάσσαλοι ορίζουν δύο διαστήματα, ..., οι 10 πάσσαλοι: 9 διαστήματα των 6 μέτρων, οπότε συνολικά χρειαζόμαστε 54 m συρματόπλεγμα.

85. Τρεις διαδοχικοί μήνες μπορεί να έχουν τις εξής ημέρες:

$$31 + 30 + 31 = 92$$

$$30 + 31 + 30 = 91$$

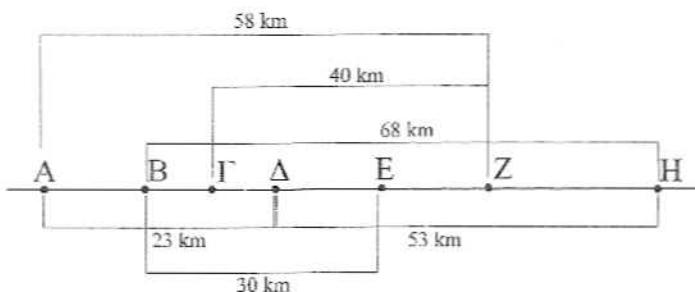
$$31 + 28 + 31 = 90$$

$$28 + 31 + 30 = 89 \quad (\text{Για δίσεκτο, αντίστοιχα } 90 \text{ ημέρες})$$

Για να έχουν και οι τρεις 4 Κυριακές, πρέπει οι τρεις μήνες να περιέχουν ΛΙΓΟΤΕΡΕΣ από 13 πλήρεις εβδομάδες. $13 \cdot 7 = 91$, άρα πρέπει να έχουν το πολύ 90 ημέρες. Ο Φεβρουάριος είναι απαραίτητος...

86. Ξεκινάμε από το ότι $I \rightarrow 0$ (αφού $A + I = A$).
 Είναι $T \rightarrow 1$, αφού δύο οποιοιδήποτε τριψήφιοι έχουν άθροισμα το πολύ τετραψήφιο με ψηφίο χιλιάδων 1.
 Δοκιμάζουμε ξεκινώντας από τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του E. Η τιμή E $\rightarrow 9$ απορρίπτεται αφού θα ήταν και το E και το P ίσα με 9, οπότε βάζουμε E $\rightarrow 8$.
 Επαληθεύουμε: Π.χ. $869 + 840 = 1709$ (και όχι μόνο)

87. Είναι: $AB = AH - BH = (AD + DH) - BH = 76 - 68 = 8 \text{ Km}$
 $EZ = AZ - AE = AZ - (AB + BE) = 58 - (8 + 30) = 20 \text{ Km}$
 $GE = GZ - EZ = 40 - 20 = 20 \text{ Km}$



88. Ο μέσος όρος των τριών μαθημάτων είναι 17, άρα η συνολική βαθμολογία είναι $17 \cdot 3 = 51$. Έχει ήδη γράψει $15 + 16 = 31$, οπότε πρέπει να γράψει 20.
89. Αν είναι x η συμερινή του πλικία, τότε:
 $x - 5 + x + 5 = 80$. Άρα $2x = 80$, δηλαδή: $x = 40$.
90. Στις 3:00 η γωνία των δύο δεικτών είναι 90°.
 Σε μία ώρα (60 min) ο λεπτοδείκτης (μεγάλος δείκτης) διαγράφει γωνία 360°.
 Σε 10 min (to 1/6 της ώρας) ο λεπτοδείκτης διαγράφει γωνία 60°.
91. Κατασκευάζουμε κατάλληλο πίνακα:

	Αθλητές	Αγώνες
1ος γύρος	100	50
2ος γύρος	50	25
3ος γύρος	24 + 1	12
4ος γύρος	12 + 1	6
5ος γύρος	6 + 1	3
6ος γύρος	4	2
7ος γύρος	2	1
Σύνολο		99

92. Το γινόμενο $20 \cdot 21 \cdot \dots \cdot 100$ έχει τα 11 τελευταία ψηφία του ίσα με το 0.
 Άρα το άθροισμα:
 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+20+21+22+23+24\dots+98+99+100$

έχει δέκα τελευταία ψηφία: 0000000055.

Το άθροισμά τους είναι $5 + 5 = 10$.

93. Προσθέτουμε ξεχωριστά:

ψηφία μονάδων: $10 \cdot (2 + 4 + 6 + 8) = 200$,

ψηφία δεκάδων: $5 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 225$,

ψηφία εκατοντάδων: (μόνο το 100) = 1, Σύνολο: 426.

94. Έστω $2\alpha\beta\gamma^3$ ο αριθμός.

Τότε: $2 \cdot \alpha \cdot \beta = 30$. Άρα $\alpha \cdot \beta = 15$.

Επίσης: $\beta \cdot \gamma \cdot 3 = 30$. Άρα $\beta \cdot \gamma = 10$

Η μόνη ακέραιη τιμή για το β είναι 5, οπότε $\alpha = 3$ και $\gamma = 2$.

95. Στο 1ο σχήμα έχουμε ένα όροφο με 1 κύβο.

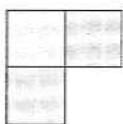
Στο 2ο σχήμα έχουμε δύο ορόφους με $1 + 3 = 4$ κύβους.

Στο 3ο σχήμα έχουμε τρεις ορόφους με $1 + 3 + 6 = 10$ κύβους.

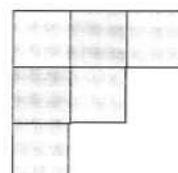
Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την κάτωψη κάθε ορόφου και τους κύβους που προσθέτουμε σε κάθε επιπλέον βήμα.



1ο βήμα



2ο βήμα



3ο βήμα

96. Οι έδρες όλων των εξωτερικών κουτιώνθα βαφτούν κόκκινες.

Το μόνο κουτί που δεν θα βαφτεί είναι το κεντρικό.

97. Πλήρης ο κύβος θα είχε $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ κύβους. Λείπουν 5. Άρα το σχήμα έχει 22 κύβους.

98. Έχι κύβοι επιφάνειας 6 cm^2 ενώνονται σε πέντε έδρες. Αφαιρούμε το εμβαδό της έδρας που εφάπτεται με κάποια άλλη έδρα, αφαιρούμε διπλαδή, συνολικά 10 cm^2 . Ολικό εμβαδόν: $6 \cdot 6 - 10 = 26 \text{ cm}^2$.

99. Οι όροφοι του σχήματος έχουν διαδοχικά:

$1, 2 \cdot 2 = 4, 3 \cdot 3 = 9, 4 \cdot 4 = 16$ κύβους.

Προσθέτουμε έναν 5ο όροφο στη βάση με $5 \cdot 5 = 25$ κύβους και έναν 6ο με $6 \cdot 6 = 36$ κύβους. Συνολικά: $25 + 36 = 61$ κύβους.

100. Κάθε τετράγωνο έχει εμβαδόν 9 cm^2 . Η πάνω έδρα αποτελείται από τρία τετράγωνα, άρα έχει εμβαδόν $3 \cdot 9 = 27 \text{ cm}^2$.

Το ίδιο η κάτω και οι δύο πλάγιες έδρες.

Η εσωτερική επιφάνεια έχει 4 τετράγωνα, άρα έχουν εμβαδόν

$8 \cdot 9 = 72 \text{ cm}^2$. Η εσωτερική επιφάνεια έχει 4 τετράγωνα, άρα έχει εμβαδόν $4 \cdot 9 = 36 \text{ cm}^2$. Συνολικά έχουμε: $4 \cdot 27 + 2 \cdot 72 + 36 = 288 \text{ cm}^2$.

Βιβλιογραφία

Για τη σύνταξη αυτού του βιβλίου χρησιμοποίησαμε πολλά βιβλία, τόσο από τον Ελληνικό χώρο, όσο και από ξένες χώρες. Πολύτιμες ήταν επίσης οι πηγές που βρήκαμε στο διαδίκτυο. Από την πλούσια αυτή βιβλιογραφία αναφέρουμε ενδεικτικά τα εξής βιβλία:

- Μπάμπης Στεργίου, "Διαγωνισμός στα Μαθηματικά", (ΤΑΞΗ Ε'), Εκδόσεις Σαββάλας.
- Μπάμπης Στεργίου, "Διαγωνισμός στα Μαθηματικά", (ΤΑΞΗ ΣΤ'), Εκδόσεις Σαββάλας.

Βιβλία γραμμένα ειδικά για τους μαθητές του Δημοτικού που επιθυμούν να γνωρίσουν την αληθινή όψη και μαγεία των μαθηματικών μέσα από τεχνικές, μεθόδους και εκατοντάδες ελκυστικά προβλήματα. Περιέχουν τη βασική θεωρία, χρήσιμα σχόλια και συμπληρώσεις της θεωρίας, θέματα από διαγωνισμός άλλων χωρών και πύσεις σε όλες τις προτεινόμενες ασκήσεις. Προορίζονται, όχι μόνο για όσους μαθητές επιθυμούν να συμμετάσχουν στο διαγωνισμό της ΕΜΕ ή το διαγωνισμό Καγκουρό, αλλά και όσους θέλουν να αξοποιούν δημιουργικά την ώρα τους πάνοντας ασκήσεις που συμπληρώνουν το σχολείο και προσφέρουν μόρφωση και ευχαρίστηση.

- Ηλίας Γκουγκουσάμος, "Πρακτική Αριθμητική", Εκδόσεις Κωστόγιαννος
- Σωτήρης Λουρίδας – Κώστας Σάλαρης "Μαθηματικές Ολυμπιάδες", Εκδόσεις Λιβάνη
- Διαγωνισμοί για το δημοτικό: ΚΥΠΡΟΣ – ΗΠΑ – ΚΑΝΑΔΑ – Ν. ΑΦΡΙΚΗ – Μ. Βρετανία κλπ.
- Διαγωνισμοί για το δημοτικό της ΕΜΕ και των παραρτημάτων
- Διαγωνισμός Καγκουρό

Ηλεκτρονικές σελίδες

<http://www.emepne.gr>

<http://www.kangaroo.gr/>

<http://mathcounts.org/Page.aspx?pid=195>

<http://www.gcschool.org/pages/program/Abacus.html>

<http://www.mathe-wettbewerbe-nrw.de/>

<http://stabi.hs-bremerhaven.de/mathezirkel/>

<http://www.stfx.ca/special/mathproblems/grade5.html>

